

第 9 章

境界層と物体まわりの流れ

第9章 境界層と物体まわりの流れ

新幹線、車、飛行機、深海探査船など、物体が流体中を移動する場合、物体は流体から抵抗力を受ける。これらは人間がプールで泳ぐ時や強風のなかを歩く時にも経験する事実である。このように物体が流体中を移動することによって受ける抵抗力は、物体の壁面近傍にできる**境界層**に関する。

本章では主として、物体のまわりを流れる**外部流れ**について、そこに形成される境界層や物体に働く抵抗力について学ぶ。

9.1 境界層とは

第8章の管内流れ(**内部流れ**)で学んだように、いままで流体と物体壁面との間に生ずる摩擦抵抗を考える際に、流体の速度が一樣なものとして巨視的な取り扱いをしてきた。流れに対する**レイノルズ数**がある程度小さい場合はそれで差し支えないが、速度が大きくなったり、粘性が小さくなったりしてレイノルズ数が大きくなるとそのような取り扱いができなくなる。

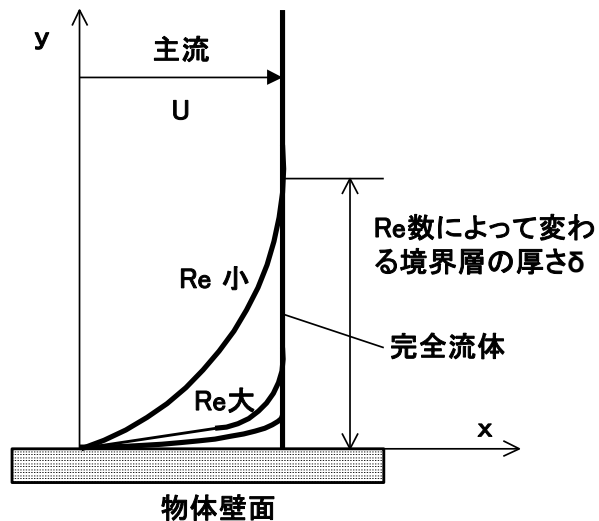


図 9.1 境界層の速度分布

図 9.1 に示すように、速度 U の一様な流れの中に置かれた物体壁面近傍の流れをよく観察すると、速度分布の形状は**レイノルズ数**に依存して変化し、二つの層に大別される。すなわち、

- ・ 第一の層：物体表面に極めて近い薄い層の領域。ここでは粘性の影響が著しく現れ、速度勾配 du/dy は非常に大きく、したがってせん断摩擦応力が大きく作用する。
- ・ 第二の層：この第一の薄い層の外側全体の領域。この領域では粘性による影響はほとんどなく、理想流体と同様な流れを示す。

境界層 (boundary layer) とはこの第一の層、すなわち、物体表面に沿う薄い層をいい、**プラントル**によって名づけられたものである。このように、物体表面に沿って速度こう配が大きい境界層とその外側に存在する**主流** (main stream) を区別することによって、流れの場を粘性流体と理想流体の特質が発揮される領域に分割することができる。その結果、プラントルによって提唱された**境界層理論**は第6章で学んだ粘性流体の運動方程式である NS 方程式の解法などで有効に活用され、古典流体力学の発展に大きく貢献することになった。

9.1.1 境界層の厚さ

境界層の性質を調べるまえに、まず境界層の厚さを定義しておこう。物体壁面近傍の極く薄い層の速度を u 、その外側の第二の層の速度を主流速度と呼び、記号 U で表すと、図 9.2 に示されるように、**境界層の厚さ δ** は、速度が $u = U$ となる点までの壁面

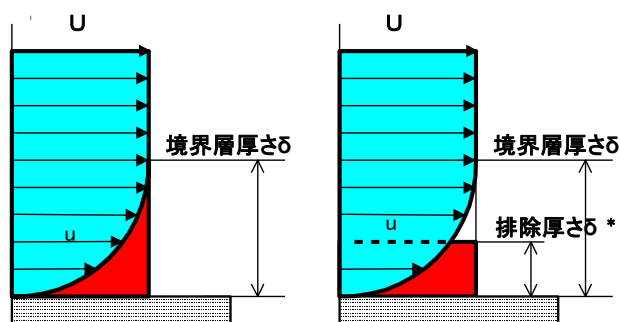


図 9.2 境界層の厚さと排除厚さ

からの距離と定義される。しかしながら、この $u = U$ となる点を見出すことは実際かなり困難である。そこで通常、境界層の厚さは、 $u = 0.99U$ となる位置で定義されることが多い。

一方、境界層の厚さ δ に対して、 δ に代わるものとして、以下に示す**排除厚さ (displacement thickness) δ^*** や**運動量厚さ (momentum thickness) θ** が用いられ、NS 方程式の近似解法などで有効に利用されてきた。まず、排除厚さ δ^* は壁面の流れに沿う方向に x 軸、それに垂直方向に y 軸をとると、単位幅 (z 軸方向の幅は 1 と考える) についてつぎのように定義される。

- 境界層排除厚さの定義：
$$\delta^* = \frac{1}{U} \int_0^\delta (U - u) dy \quad (9.1)$$

これは厚さ δ^* を除けば、流れが一様であるとみなすことに相当し、図 9.2 の左側に示される**赤く塗りつぶされた**境界層によって排除される面積 (体積流量) を、右側のように長方形にならしたときの厚さ (高さ) として与えられる。

つぎに運動量厚さ θ について説明しよう。上記の排除厚さ δ^* の考え方に加えて、境界層内では運動量 (質量 \times 速度) が理想流体の流れよりも減少するからその欠損分を考え、速度 U で厚さ θ の部分を通過する単位時間当りの運動量と現実の境界層における運動量欠損を等しくおく考えから作り出された物理量である。したがって、2次元流では単位幅について、運動量のつりあいから運動量厚さ θ はつぎのように定められる。

- 運動量厚さの定義：
$$\rho U^2 \theta = \rho \int_0^\delta u(U - u) dy ; \theta = \frac{1}{U^2} \int_0^\delta u(U - u) dy \quad (9.2)$$

ここで、式(9.2)の右辺に示される $u(U - u)$ の項が、境界層内における運動量欠損分に相当する。このように定義された境界層の厚さ δ 、境界層排除厚さ δ^* および運動量厚さ θ は運動量の法則を利用することによって、壁面の摩擦応力の評価に使用できる。その例を以下に示していこう。

☆9.1.1 境界層厚さの研究課題

1. 層流境界層内の速度分布が

$$u = U(2\eta - \eta^2); \eta = y/\delta$$

で表されるとき、排除厚さ δ^* および運動量厚さ θ を求めよ。

2. 乱流境界層内の速度分布が1/7乗法則

$$u = U\eta^{1/7}; \eta = y/\delta$$

で表される時、排除厚さ δ^* および運動量厚さ θ を求めよ。

9.1.2 境界層近似と境界層運動方程式

図 9.3 に示すように、一様流（主流）の流れ方向に平行におかれた平板に沿って流れる流体の運動と平板が受ける抵抗力について考える。

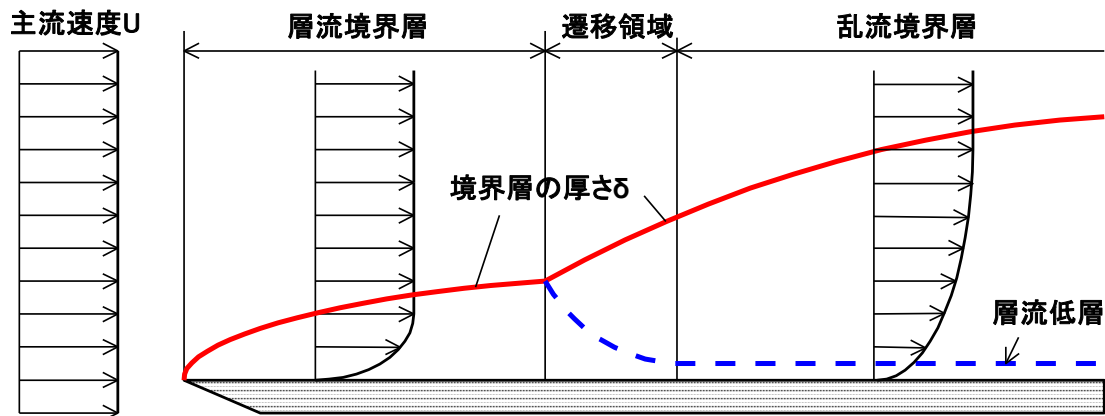


図 9.3 平板に沿う境界層の発達

この場合、境界層は平板の前縁から形成される。この境界層に働く流体摩擦は外側の流体の速度を弱めようとするので、前縁から遠ざかるにつれて次第にその厚さを増していく。この様子が図 9.3 において、赤い線で示されている。一般には、上流側のある範囲までは境界層内の流れは層流となり、遷移領域をへて乱流に変化する。前者を層流境界層 (laminar boundary layer)、後者を乱流境界層 (turbulent boundary layer) といい、層流から乱流に移り変わる領域を遷移領域 (transition region) とよんでいる。

境界層内の流れを解析するには第 6 章で学んだ粘性流体における NS 方程式を基礎として、以下に述べる境界層近似が行われる。

☆復習：2次元、非圧縮性、非定常流体の NS 方程式および連続の式は第 6 章においてつぎのように与えられた。

$$1) \quad x \text{ 方向運動方程式} : \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$2) \quad y \text{ 方向運動方程式} : \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$3) \quad \text{連続の式} : \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

☆境界層近似とは

主流方向を x 軸、それと直交する方向を y 軸とし、 x 軸方向の物体の大きさを示す代表長さを l 、基準となる速度の尺度を U 、境界層の厚さを δ 、各軸方向の速度成分をそれぞれ u, v とし、**質量力** を当面无視する。この条件で、境界層が薄い、すなわち $\delta \ll l$ と仮定したとき、運動方程式 1)、2) において、いずれの項が省略できるか調べてみよう。

まず連続の式 3) において、 $y=0$ で $v=0$ の境界条件のもとで積分すると

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy ; \text{この } v \text{ のオーダーは ; } v \propto U\delta/l \quad (9.3)$$

である。すると y 方向速度成分は $v \propto U\delta/l$ のオーダーであり、 $\delta \ll l$ から、 v は $v \ll U$ であることがわかる。したがって、2) の y 方向運動方程式の各項は十分小さく、全て省略でき $\partial p / \partial y = 0$ となる。このとき圧力 p は単に x, t のみの関数で y 方向には無関係であり、圧力 p は物体表面から y 方向の境界層の外側まで一定と近似される。ちなみに NS 方程式における各項とそのオーダーを記すと、

$$\cdot \text{各 項 ; } u \quad v \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} \quad v \frac{\partial u}{\partial y} ; u \frac{\partial v}{\partial x} \quad v \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (9.4)$$

$$\cdot \text{オーダー ; } U \quad \frac{U\delta}{l} \quad \frac{U}{l} \quad \frac{U}{l} \quad \frac{U^2}{l} \quad \frac{U^2}{l} ; \frac{U^2\delta}{l^2} \quad \frac{U^2\delta}{l^2} \quad \frac{U}{l^2} \quad \frac{U}{\delta^2} \quad \frac{U\delta}{l^3} \quad \frac{U}{l\delta} \quad (9.5)$$

となる。よって、1) の x 方向運動方程式における $\partial^2 u / \partial x^2$ は $\partial^2 u / \partial y^2$ より小さくなるので、この項を省略して最終的に、**境界層運動方程式** はつぎのようになる。

$$x \text{ 方向境界層運動方程式} : \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9.6)$$

$$y \text{ 方向境界層運動方程式} : -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (9.7)$$

なお、境界層の外側は、**理想流体** とみなすと、 $v=0$ であるから、主流の速度を U とすると、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9.8)$$

である。一方、**定常流**では、境界層外側の運動方程式は

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9.9)$$

である。

9.1.3 境界層の運動量方程式

前節で NS 方程式は**境界層近似**を行うとかなり簡略化された運動方程式となることを示した。以前はこのような近似を用いることによって流れ場を解明することが熱流体力学の主流であったが、近年は近似ではなくてむしろ厳密に NS 方程式をコンピュータで直接的に解く「**数値流体力学**」の分野が急速に発展しており、それが主流となりつつある。興味ある読者はこの、「数値流体力学」のに関連する教科書を参考にしてください。

さて、前章で境界層方程式は組み立てられたが、この式からはまだ物体が流体によって受ける力など、境界層方程式が提案された背景が見えてこない。そこで、つぎに、境界層近似によって何を求めることが可能となるかについて、**境界層運動量方程式 (momentum equation)**を中心として紹介しよう。

まず、簡単化のために、流れは定常であると仮定する。境界層の厚さを δ とし、

$y = \delta$ における速度すなわち、境界層外側の主流速度を U とする。図 9.4 に示すように、境界層の内部に長さ dx 、境界層の厚さ δ で囲まれた**検査面** ABCD を考え、流れの方向 x について運動量の法則を適用する。

・単位時間に検査面 AB に流れ込む運動量は、

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \quad (9.10)$$

・単位時間に**検査面** CD から流出する運動量は

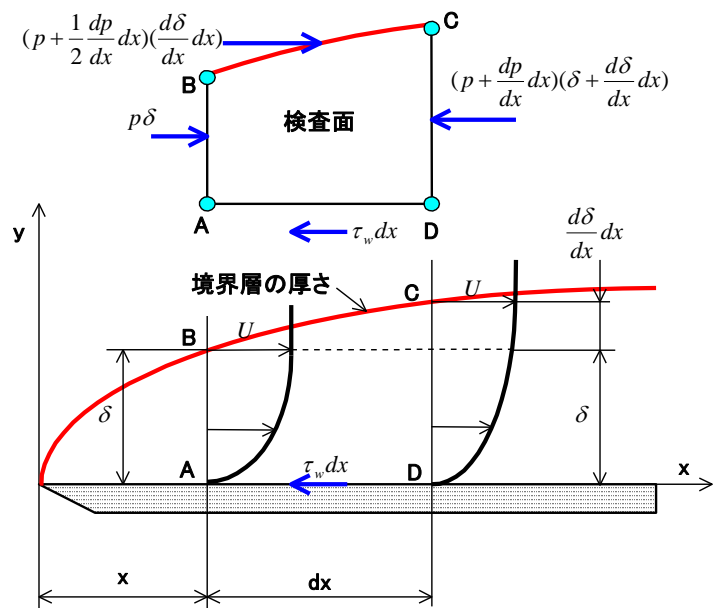


図 9.4 境界層方程式の導出モデル

$$\int_0^\delta \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u^2 dy \right) dx \quad (9.11)$$

・単位時間に検査面 AB に流れ込む質量は

$$\int_0^\delta \rho u dy \quad (9.12)$$

・単位時間に検査面 CD から流出する質量は

$$\int_0^\delta \rho u dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) dx \quad (9.13)$$

・この質量の差は面 BC から流れ込み、その質量がもつ x 方向運動量は

$$U \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) dx \quad (9.14)$$

・よって単位時間に流れ出る流体の持つ運動量と流れ込む運動量の差は

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u^2 dy \right) dx - U \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) dx \quad (9.15)$$

さて、検査面 AD に働く壁面せん断応力を τ_w とすると、面 AD には $-\tau_w dx$ の

力が働く。層流の場合にはニュートンの粘性法則から $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$ の壁面せん断応力が働く。また、面 BC では $\partial u/\partial y = 0$ であるからせん断応力は働かない。

つぎに面 AB に働く圧力による力は $p\delta$ で、面 CD では

$$-\left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) \left(\delta + \frac{d\delta}{dx} dx \right) \quad (9.16)$$

また、面 BC に働く圧力による力の x 方向成分は

$$\left(p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} dx \right) \frac{d\delta}{dx} dx \doteq p \frac{d\delta}{dx} dx \quad (9.17)$$

である。これらのせん断力と圧力による力の総和は $-(\delta dp/dx + \tau_w) dx$ であるから、

運動量の法則によって、検査面 ABCD においての力のつりあいから次式となる。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_w \quad (9.18)$$

これらの式をカルマンの積分条件といい、境界層に対する運動量方程式である。

非圧縮性流体の場合、先に定義された次式の排除厚さ δ^* および運動量厚さ θ

$$\delta^* = \frac{1}{U} \int_0^\delta (U - u) dy ; \theta = \frac{1}{U^2} \int_0^{\delta^*} u(U - u) dy \quad (9.19)$$

を用い、定常流の場合には圧力こう配と主流速度の間に $\rho U dU/dx = -dp/dx$ の関係があることを考慮すると、最終的に境界層運動量方程式は

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} (2+H) = \frac{\tau_w}{\rho U^2} ; H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (9.20)$$

となる。式(9.20)は境界層が層流でも乱流でも適用でき、主流の速度分布 $U(x)$ が与えられれば、境界層の発達状況や壁面でのせん断応力（摩擦応力）などが求められる。とくに、主流の方向に圧力こう配がない場合には

$$dU/dx = 0 \quad (U = \text{const})$$

であるから、境界層運動量方程式はつぎのように簡単化される。

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (9.21)$$

さらに、境界層内の速度分布 u/U を y/δ の関数 $f(y/\delta) = f(\eta)$ を用いて

$$\frac{u}{U} = f(y/\delta) = f(\eta) ; \eta = \frac{y}{\delta} \quad (9.22)$$

と表せば、 $dy = \delta d\eta$ であるから

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^1 f(\eta) \{1 - f(\eta)\} \delta d\eta \right] = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \text{ となり、この式における速度分布関数の積分を}$$

$$\left[\int_0^1 f(\eta) \{1 - f(\eta)\} \delta d\eta \right] = \alpha \quad (9.23)$$

とおけば、壁面せん断応力がつぎのように求められる。

$$\tau_w = \alpha \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (9.24)$$

式(9.24)が、定常、非圧縮性流体の境界層における壁面せん断応力 τ_w と境界層の厚さ δ をリンクする基礎式である。

☆9.1.3 運動量方程式の研究課題

1. 非圧縮性、定常流れにおける境界層運動量方程式が次式で表されることを証明せよ。

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} (2+H) = \frac{\tau_w}{\rho U^2} ; H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

9.1.4 平板の摩擦抵抗

この節では**平板**の摩擦抵抗について1) 層流の場合、2) 乱流の場合を扱う。

1) 層流境界層の場合

一様流中に非常に薄い**平板**が流れに平行に置かれた場合を考えてみよう。この場合には圧力は流れの方向に一定 ($p = \text{const}$) であり、境界層外側の主流速度 U も一定 ($U = \text{const}$) となる。いま、平板の長さ l を代表寸法とし、これと主流の

速度 U で表されるレイノルズ数 $R_{el} = Ul/\nu$ が 5×10^5 より小さい場合には、平板全体が層流境界層になる。

この層流境界層の場合について、まず境界層内の速度分布をつぎのように仮定し、運動量方程式を用いて近似的に解いてみる。層流境界層内の速度分布を

$$\frac{u}{U} = f(\eta) = \frac{2y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\eta - \eta^2, \text{ただし、}\eta = \frac{y}{\delta} \quad (9.25)$$

とする。この速度分布は、 $y = \delta$ で $u = U$ 、 $\partial u / \partial y = 0$ となり、外側の一様流に滑らかにつながる速度分布となる。このとき、

$$\theta = 2\delta/15 ; \tau_w / \rho U^2 = 2\nu / U\delta \quad (9.26)$$

となるから、境界層の厚さの変化は

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{15\nu}{U\delta} \quad (9.27)$$

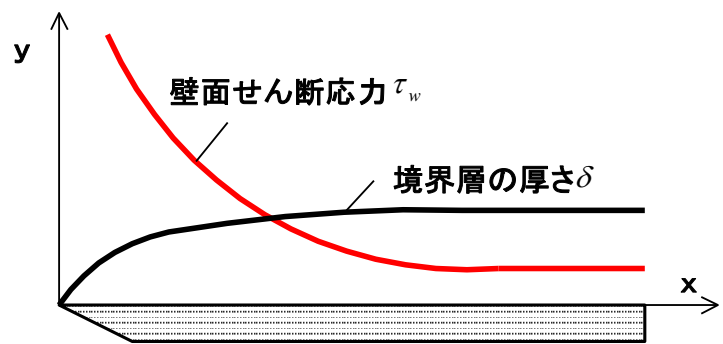
となる。

平板の前縁 $x = 0$ で境界層の厚さ $\delta = 0$ であるから、この境界条件のもとで式 (9.27) を解くと

$$\delta = 5.48 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} ; \frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.365 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}$$

となる。図 9.5 にこの結果を模式的に示した。これよりわかることは境界層の厚さ δ は板の前縁からの距離 x の平方根に比例して増し、表面に働くせん断応力 τ_w は距離 x の平方根に逆比例するということである。

さて、平板の長さを l 、幅を B とすれば、板の片面に働



く摩擦抗力(frictional drag) D_f

図 9.5 平板境界層の厚さと壁面応力

は、

$$D_f = B \int_0^l \tau_w dx = 0.73 \rho \nu U B \sqrt{\frac{Ul}{\nu}} = 0.73 \rho \nu U B \sqrt{R_{el}} ; R_{el} = Ul/\nu \quad (9.28)$$

となる。この摩擦抗力を平板の表面積 Bl をとって、

$$D_f = C_f (\rho U^2 / 2) Bl \quad (9.29)$$

と表すと、**摩擦抗力係数** C_f は

$$C_f = D_f / \left(\frac{1}{2} \rho U^2 Bl \right) = \frac{1.46}{\sqrt{Re_l}} \quad (9.30)$$

となる。

☆コメント：ここまでは境界層方程式から導かれる結論を先に示してきた。式の導出過程は章末の総合演習問題 1.2.3 で確認してください。

☆参考：一方、**境界層運動方程式**を解いたブラジウスによる厳密解によると、

$$\theta = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} ; \delta^* = 1.73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} ; \tau_w = 0.332 \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (9.31)$$

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} ; \delta = 4.91 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = 4.91 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \cdot x \quad (9.32)$$

$$D = \int_0^l \tau_w dx = 0.332 B \sqrt{\rho \mu U^3} \int_0^l x^{-1/2} dx = 0.664 B \sqrt{\rho \mu U^3} l \quad (9.33)$$

である。

☆9.1.4 層流境界層の研究課題

1. 平板に沿う層流境界層内の速度分布が、円管内の場合と同じように放物線になるとすれば、壁面での摩擦応力 τ_w 、境界層の厚 δ さおよび**摩擦抗力係**

数 C_f がそれぞれ次式で表されることを示せ。

$$\tau_w = 0.730 \frac{\rho U^2}{2} \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} ; \delta = 5.48 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \times x ; C_f = 1.46 / \sqrt{Re_l}$$

ただし、円管内層流の速度分布は次式で与えられる。

$$u = u_{max} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\}。 \text{ここで、} u ; u_{max} ; r ; R \text{はそれぞれ、円管内の局所}$$

速度、円管中心速度、円管中心から測った距離および円管半径である。

2) 乱流境界層の場合

レイノルズ数 R_{el} が 5×10^5 よりも大きくなると、ほぼ前縁から乱流境界層が形成される。そこで平板全長が乱流境界層で覆われているものとみなして、境界層の運動量方程式を用いて、境界層厚さ δ 、壁面せん断応力 τ_w 、摩擦抗力 D_f および摩擦抗力係数 C_f を求めてみよう。

問題を簡単化して、境界層内の速度分布が滑らかな円管の乱流の速度分布と同様な $1/7$ 乗則で表されるものと仮定し、壁面せん断応力に対してはブラジウスの経験式が成り立つものとする。すなわち、

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7} ; \frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225 \left(\frac{v}{U\delta}\right)^{1/4} \quad (9.34)$$

とする。ここで、平板の境界層運動方程式において α は

$$\alpha = \int_0^1 f(\eta)(1-f(\eta))d\eta = \int_0^1 (\eta^{1/7} - \eta^{2/7})d\eta = \frac{7}{72} \quad (9.35)$$

となるから、これを平板の乱流境界層運動量方程式(9.24), $\tau_w = \rho U^2 \alpha d\delta/dx$ に代入して、

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left(\frac{v}{U\delta}\right)^{1/4} \quad (9.36)$$

となる。式(9.36)を平板の前縁 $x=0$ で $\delta=0$ の境界条件のもとで積分すれば

$$\delta = 0.37 \left(\frac{v}{Ux}\right)^{1/5} x \quad (9.37)$$

が得られる。つぎに平板の片面に働く摩擦抗力 D_f は、平板の長さを l 、幅を B とすれば

$$D_f = B \int_0^l \tau_w dx = B \int_0^\delta \frac{7}{72} \rho U^2 d\delta = 0.072 \frac{\rho U^2}{2} Bl \left(\frac{v}{Ul}\right)^{1/5} \quad (9.38)$$

となる。平板全長に対する摩擦抗力係数 C_f は

$$C_f = \frac{D_f}{(1/2)\rho U^2 Bl} = 0.072 \left(\frac{v}{Ul} \right)^{1/5} = \frac{0.072}{R_{el}^{1/5}} \quad (9.39)$$

と表される。実験結果と良くあうようにするには、式(9.39)の係数 0.072 のかわりに 0.074 をとり、

$$D_f = 0.074 \frac{\rho U^2}{2} Bl \left(\frac{v}{Ul} \right)^{1/5} ; C_f = 0.074 \left(\frac{v}{Ul} \right)^{1/5} = \frac{0.074}{R_{el}^{1/5}} \quad (9.40)$$

とすればよい。以上の式は $5 \times 10^5 < R_{el} < 5 \times 10^6$ の範囲で実験結果と良く一致し、

同じ R_{el} の範囲において、板の前縁付近に層流境界層を考慮した場合は次式が提案されている。

$$C_f = \frac{0.074}{R_{el}^{1/5}} - \frac{1700}{R_{el}} \quad (9.41)$$

さらに、 $R_{el} > 10^7$ という広い範囲に適應する摩擦抗力係数を得ようとするれば、

円管内の速度分布として、第 8 章で学んだ対数法則である次式を境界層内の速度分布として用いたほうが良い。

$$\frac{u}{u_*} = 5.5 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{u_* y}{v} \right) \quad (8.43)$$

しかしながら、指数法則の速度分布式 (8.43) を用いた場合、この節で示されたような解析的な検討は困難であり、数値解析的な計算が必要となる。

$R_{el} > 10^7$ の範囲においては平板全長にわたって乱流境界層となり、数値解析結果によって、摩擦抗力係数としては次式が推奨されている。

$$C_f = \frac{0.455}{(\log_{10} R_{el})^{2.58}} \quad (9.42)$$

以上、この節で述べてきた滑らかな平板における摩擦抗力係数 C_f の実験と経験

式を比較した結果を図 9.6 に示す。図の縦軸には摩擦抗力係数 C_f 、横軸には平

板のレイノルズ数 R_{el} がとられている。

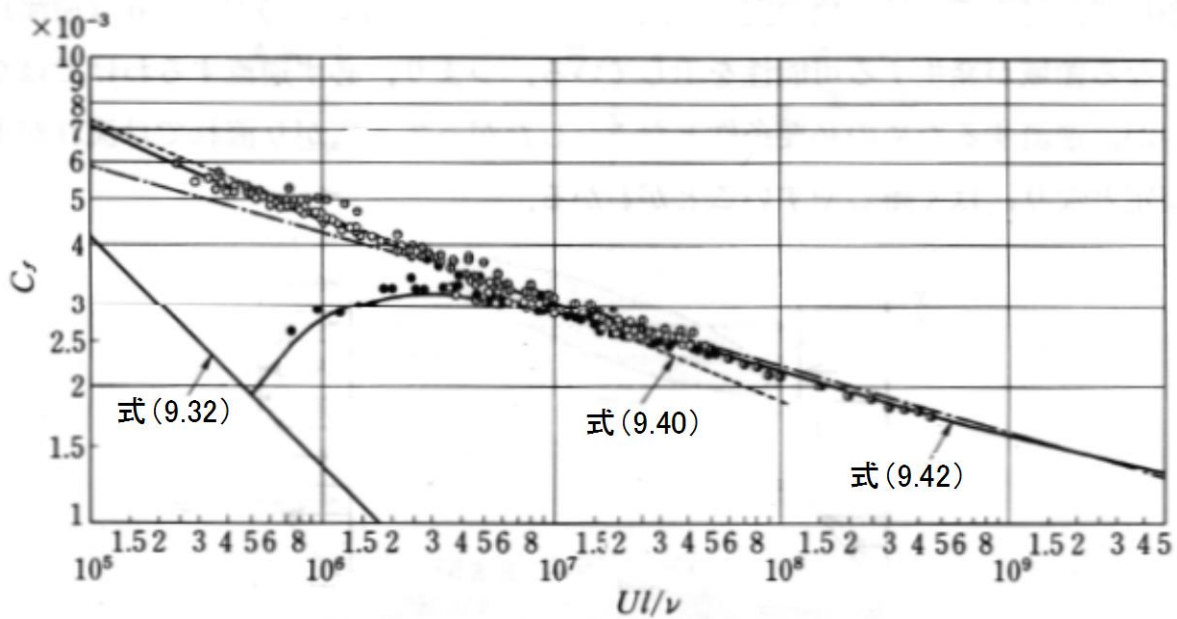


図 9.6 平板における摩擦抗力係数の変化

☆9.1.4 乱流境界層の研究課題

1. 境界層内の速度分布が滑らかな円管の乱流の速度分布と同様な $1/7$ 乗則で表されるものと仮定し、壁面せん断応力に対しては**ブラジウス**の経験式、

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7} ; \frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \text{ が成り立つものとして、以下の}$$

問いに答えよ。

- 1) 平板の境界層運動方程式において α は

$$\alpha = \int_0^1 f(\eta)(1-f(\eta))d\eta = \int_0^1 (\eta^{1/7} - \eta^{2/7})d\eta = \frac{7}{72} \text{ となること。}$$

- 2) これを平板の**乱流境界層**運動量方程式 $\tau_w = \rho U^2 \alpha d\delta/dx$ に代入して、

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \text{ となること。}$$

- 3) この式を平板の前縁 $x=0$ で $\delta=0$ の境界条件のもとで積分すれば

$$\delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5} \text{ が得られること。}$$

9.2 流れの中の物体に働く力

流体中を物体が進行する場合または流れの中に物体が静止している場合、物

体が流体から受ける力を流体の抵抗 (fluid resistance) または**抗力** (drag) という。抗力は**摩擦抗力**(frictional drag) と**圧力抗力** (pressure drag) よりなる。

9.2.1 摩擦抗力・圧力抗力と抗力係数

摩擦抗力：流体が物体表面に沿って流れれば粘性のために物体の表面に摩擦抗力が発生する。この摩擦抗力の主流方向成分を物体表面全体にわたる総和が9.1節で学んだ摩擦抗力 D_f である。

圧力抗力：例えば球または円柱が理想流体の一様流中に置かれたとすれば、

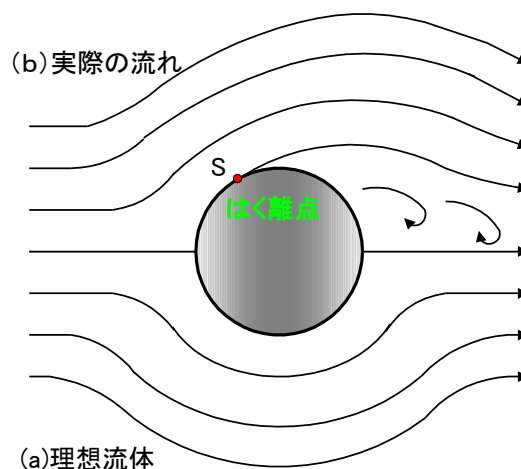


図 9.7 物体まわりの流れ

図 9.7(a)のように前後対称な流れとなるが、実在流体中では図(b)のように、物体表面のある点にて流れの**はく離** (separation)が生じ、その後方に渦のある領域が形成され、流れは前後で非対称となる。渦ができるとその部分の圧力が下がり物体は流体から流れの方向に力を受ける。

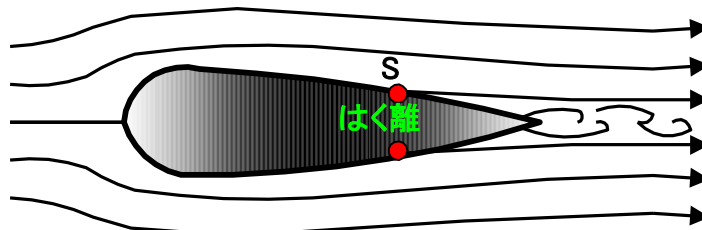


図 9.8 流線型物体まわりの流れ

このような抗力は物体まわりの圧力分布に関しているので**圧力抗力**という。なお、物体の形が図 9.8 のような流線型になれば、はく離点 S は後方に移り**圧力抗力**も小さくなる。また、圧力抗力には造渦抵抗と造波抵抗がある。

抗力係数：物体が受ける抗力は摩擦抗力と圧力抗力の二つからなるがこれらは常に一緒に生じる。流体の密度を ρ 、流体に対する物体の速度を U 、物体の大きさを表す面積を A とすれば、物体が受ける抗力はいずれも ρ 、 U^2 、 A に比例する。したがって、抗力 D は

$$D = C_D \frac{\rho U^2}{2} A \quad (9.43)$$

と表される。ここで C_D は摩擦抗力および圧力抗力に関する無次元の数で**抗力係数**とよばれ、実験的に定められる。

9.2.2 球と円柱まわりの抗力

1) 球の抗力

球の抗力は、球の直径を d とすれば、代表面積は $A = \pi d^2/4$ であるから、

$$D = C_D \frac{\rho U^2}{2} \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) \quad (9.44)$$

となる。図 9.9 に抗力係数 C_D に関してこれまでに得られている実験結果を示す。

ストークス (Stokes) はレイノルズ数 $R_e = Ud/\nu$ が 0.6 より小さい場合の抗力を粘性流体の運動方程式から求め、抗力が次式で与えられることを示した。

$$D = 6\pi\mu U \left(\frac{d}{2} \right) \quad (9.45)$$

この式を**ストークスの法則**という。上の両式(9.44)と(9.45)から D を消去すれば摩擦抗力係数 C_D が次式のように求められ、

$$C_D = \frac{24}{Ud/\nu} = \frac{24}{R_e} \quad (9.46)$$

となり、図 9.9 における $R_e < 0.6$ に対して実験とよく合うことが証明されている。

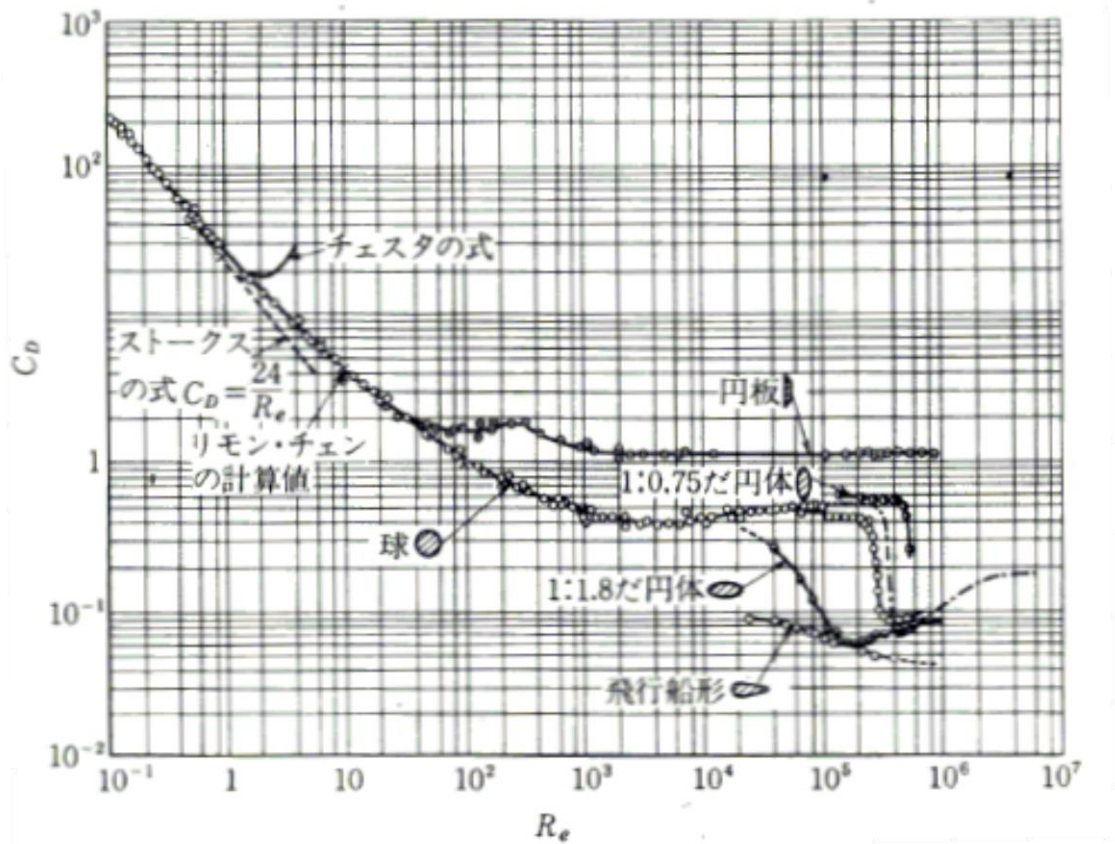


図 9.9 抗力係数とレイノルズ数の関係

2) 流体中での球の落下運動

球の抗力の応用として、図 9.10 に示すように、静止流体中に置かれた球の落下運動を考えてみよう。この場合、球は重力、流体からの抗力および浮力を受け、運動方程式はつぎのようになる。

$$m \frac{dU}{dt} = mg - \rho g V - \frac{C_D \rho U^2}{2} A \quad (9.47)$$

ここで、 m は球の質量、 V は体積、 ρ は流体の密度、 C_D は抗力係数、 U は球の落下速度、 A は基準面積で、流れに垂直な面への投影面積をとり、球の直径を d とすれば $A = (\pi d^2 / 4)$ となる。

真空中では球の落下速度は無限大まで大きくなるが、粘性流体中では、上式の右辺が 0 になる位置までしか球の速度は加速せず、このときの速度を**終速度**という。この**終速度**以降で、球は等速運動をすることになる。

では、抗力係数がストークスの法則にしたがう場合、すなわち、

$$C_D = \frac{24}{Ud/\nu} = \frac{24}{Re} \quad (9.48)$$

について、運動方程式を初期条件、時間 $t=0$ で落下速度 $U=0$ として解くと、最終的に次式が得られる。

$$U = U_\infty (1 - e^{-at}) \quad (9.49)$$

ここで、 U_∞ は**終速度**を表し、定数 a はそれぞれつぎのように与えられる。

$$U_\infty = \frac{gd^2}{18\nu} \left(\frac{m}{\rho V} - 1 \right); \quad a = \frac{3\rho\nu\pi d}{m} \quad (9.50)$$

なお、球が**終速度**に達した以降においては、運動方程式の右辺が 0 となり、球の密度を ρ_s とすれば、球の質量は $m = \rho_s V$ より、次式が成立する。

$$mg \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} \right) = \frac{C_D \rho U_\infty^2}{2} A \quad (9.51)$$

したがって、**終速度** U_∞ はつぎのようになる。

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2mg(\rho_s - \rho)}{C_D \rho \rho_s A}} \quad (9.52)$$

さらに、球の直径を d とすれば、質量は $m = (4/3)\pi(d/2)^3 \rho_s$ 、 $A = (\pi d^2 / 4)$ より、

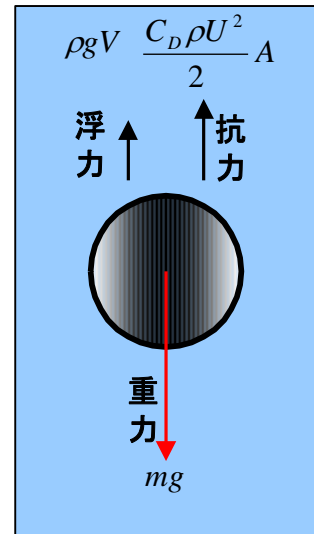


図 9.10 球の落下

$$U_\infty = \sqrt{\frac{4gd(\rho_s - \rho)}{3C_D\rho\rho_s}} \quad \text{または} \quad d = \frac{3C_D\rho\rho_s U_\infty^2}{4g(\rho_s - \rho)} \quad (9.53)$$

となる。さらに流体の粘度を μ とすれば、球のレイノルズ数は $R_e = U_\infty d \rho / \mu$ であるから、

$$C_D R_e^2 = \frac{4(\rho_s - \rho)\rho g d^3}{3\mu^2}; \quad \frac{C_D}{R_e} = \frac{4(\rho_s - \rho)\mu g}{3\rho^2 U_\infty^2} \quad (9.54)$$

という関係式が得られる。したがって、直径が既知である球の終速度 U_∞ を求めるには図の $C_D - R_e$ 曲線上に $C_D R_e^2 = \frac{4(\rho_s - \rho)\rho g d^3}{3\mu^2}$ から得られる $C_D - R_e$ 曲線を描き、2 線の交点における C_D と R_e を求めると、 $\frac{C_D}{R_e} = \frac{4(\rho_s - \rho)\mu g}{3\rho^2 U_\infty^2}$ の関係から終速度 U_∞ が決定できる。

☆9.2.1 球の抗力の研究課題

1. 球の落下運動方程式を初期条件、時間 $t=0$ で落下速度 $U=0$ として解くと、 U_∞ を終速度として、 $U = U_\infty(1 - e^{-at})$ となることを証明せよ。
2. 直径 2.5 mm 、比重 7.85 の鋼球を比重 1.26 のグリセリンの中で自然落下させたとき、十分に時間がたった後に球が到達する速度(終速度)が 1.50 cm/s であった。グリセリンの粘度 μ はいくらであるか。

3) 円柱の抗力

速度 U の定常で一様な流れの中に直径 d の円柱が置かれているとき、円柱表面の圧力分布は図 9.11 のようになる。

ここで図の縦軸は次式で定義される**圧力係数** (pressure coefficient) C_p 、横軸は

上流側から測った円柱表面の角度 θ である。なお、**圧力係数**は

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\rho U^2 / 2} \quad (9.55)$$

と定義される。ここで、 p は角度 θ における円柱表面の圧力、 p_∞ は上流側の圧力を

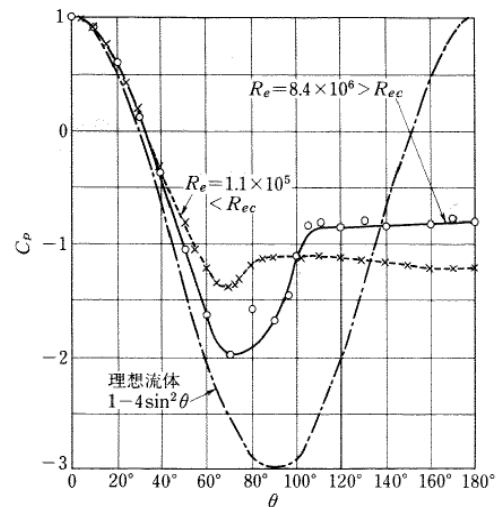


図 9.11 円柱まわりの圧力分布

意味する。このように定義された**圧力係数** C_p で整理すると、図 9.11 に示されるように、理想流体は角度 θ に対して

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (9.56)$$

という対称な曲線で表されるから、円柱は流体から抗力を受けないことになるが、実在流体はその粘性のために円柱表面に境界層が形成され、圧力分布は非対称となり、下流側で圧力が回復しないことが分かる。

一方、**円柱の抗力係数** はレイノルズ数 $R_e = Ud/\nu$ の関数となる。図 9.12 に円柱をはじめとして、楕円柱、流線形および垂直平板などの各種物体周りにおける**抗力係数** C_D と物体周りのレイノルズ数 $R_e = Ud/\nu$ に関してこれまで得られている実験結果を示す。図 9.12 に示すように、円柱の長さを l としたとき、 $R_e < 1$ のとき、抗力係数 C_D は $1/R_e$ に比例して減少していく。そして、 $10^3 < R_e < 2 \times 10^5$ の範囲では $1.0 < C_D < 1.2$ とほぼ一定な値となる。さらに $R_e = 4 \times 10^5$ 付近において、**円柱まわりの臨界レイノルズ数** 付近で急激に C_D が減少している。これは円

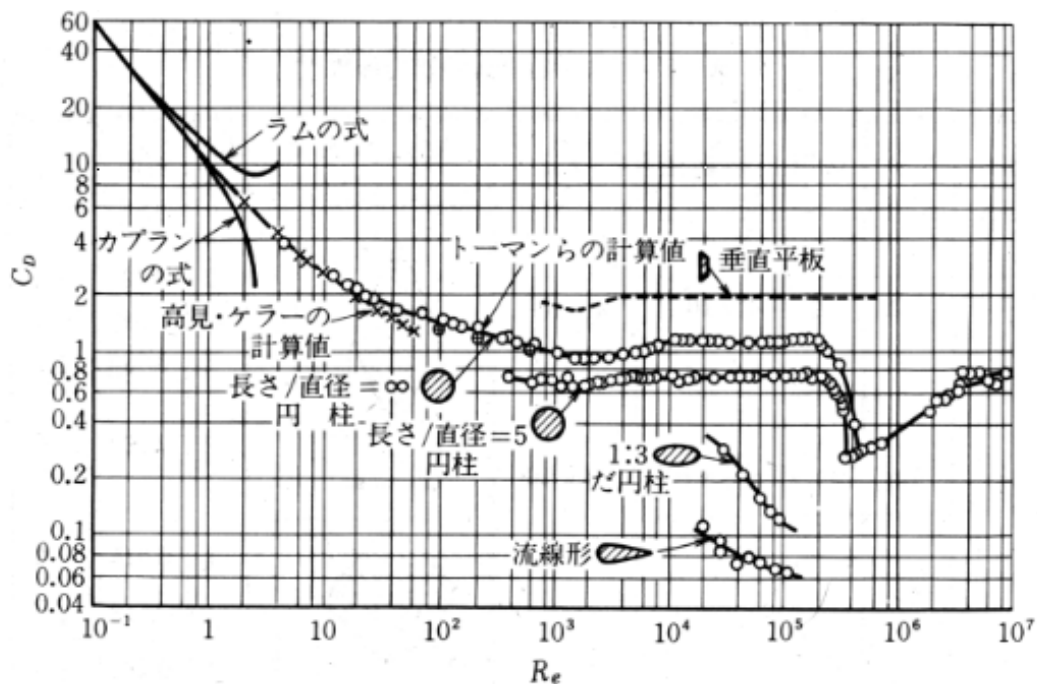


図 9.12 各種物体の抗力係数とレイノルズ数の関係

柱まわりの境界層が乱流に遷移し始めたためと考えられている。

9.2.3 翼まわりの流れと揚力・抗力

流れの中に置かれた物体に働く力のうち流れに平行な成分を**抗力**(drag)、垂直な成分を**揚力**(lift)という。したがって、一様流中に置かれた平板であっても、平板が流れに傾いて置かれれば揚力が働くことになる。ただし、そのときは当然抗力も大きくなってしまふ。このような揚力を、適当な物体の形状と流れに対する姿勢によって有効に発生させることを目的としたものが**翼**(wing)である。

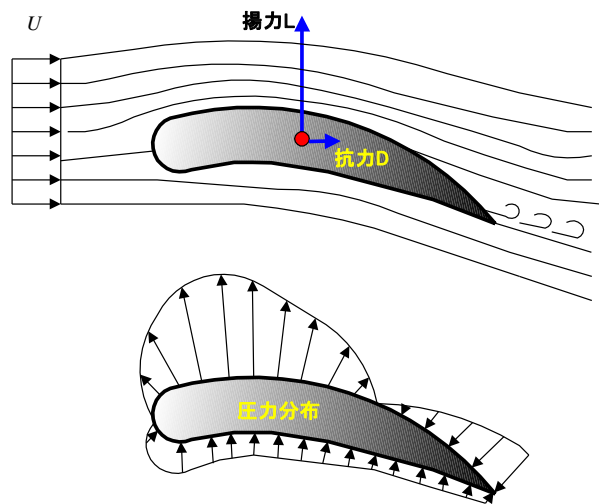


図 9.13 翼周囲の流れと揚力・抗力

空気より重い飛行機が浮く理由を一

言で言えば、翼が空气中を前進するからであり、翼が流れに対して適当な姿勢に置かれたとき、翼の上面は流れが加速されて圧力が低下し、一方、翼の下面は流れが緩やかに減速されて、圧力が上昇する。図 9.13 に示すように、このような上下面の圧力差が上向きの揚力を発生させることになる。

翼の断面形状を**翼形**(aerofoil)といい、いろいろな翼形の性能を調べるために、その幾何学的な名称が図 9.14 に示すように定められている。この他に、紙面に直角な方向の長さを**翼幅**(span)といい、翼幅 b と翼弦長 l との比 b/l を**アスペクト比**(aspect ratio)という。

図 9.14 に示されるように、速度の一様流中に置かれた**迎え角度**(attack angle) α の翼に働く**抗力**(drag)を D 、**揚力**(lift)を L とするとき、抗力および揚力は

$$D = C_D \rho U^2 A / 2 \quad (9.57)$$

$$L = C_L \rho U^2 A / 2 \quad (9.58)$$

で与えられる。ここで、 C_D 、 C_L は**抗力係数**(drag coefficient)、**揚力係数**(lift coefficient)で、基準面積 A は、翼弦を含む平面への翼の投影面積をとる。 C_D 、 C_L は翼の形状、迎え角度、レイノルズ数、

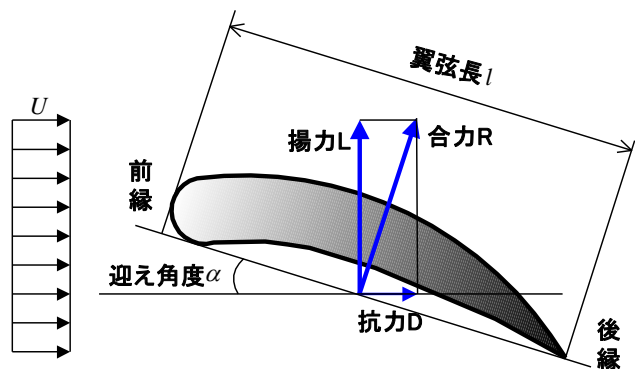


図 9.14 翼形とその名称

翼面の表面粗さなどによって影響される。ただし、レイノルズ数が十分大きいときには、ほぼ迎え角度に強く依存する。揚力と抗力の比を揚抗比(lift drag ratio)といい

$$\varepsilon = L/D = C_L/C_D \quad (9.59)$$

と定義され、揚抗比 ε は大きいほうが翼性能としては望ましい。なお、翼性能の実験によると、ある翼形では迎え角度 α が 12° 付近をこえると、揚力すなわち C_L が急速に減少し失速(stall)が起きることが報告されている。

☆翼の設計と性能について

- 1) どのような形がいいのだろうか？。翼型について調査してみよう。
- 2) 迎え角度 α に対する C_D 、 C_L の変化を想像し、グラフに書いて考察してみよう。

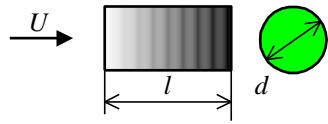
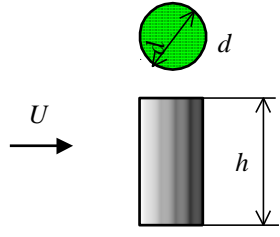
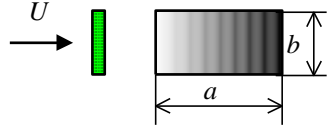
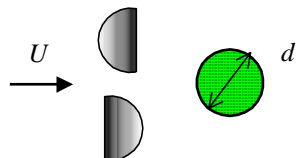
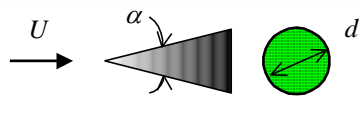
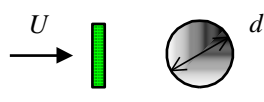
9.2.4 流れの中の各種物体の抵抗

前節で、流れの中に置かれた物体に働く抗力は、

$$D = C_D \rho U^2 A / 2$$

で与えられることを述べた。この節では円柱、円板、円錐、中実半球、平板など種々の形をした物体の抗力係数 C_D の値を表9.1にまとめて紹介する。これらの値は一般的な状況下における概数としての目安を与えるものであり、厳密には物体に働く抗力はレイノルズや物体表面の粗さに依存して変化するので、注意が必要である。

表 9.1 各種物体の抗力係数

物体名	物体形状	寸法	基準面積 A	抗力係数 C_D
円柱 (横置き)		$l/d=1$ $l/d=2$ $l/d=4$ $l/d=7$	$\frac{\pi d^2}{4}$	0.91 0.85 0.87 0.99
円柱 (縦置き)		$h/d=1$ $h/d=2$ $h/d=5$ $h/d=10$ $h/d=40$ $h/d=\infty$	$d \times h$	0.63 0.68 0.74 0.82 0.98 1.20
平板		$a/b=1$ $a/b=2$ $a/b=4$ $a/b=10$ $a/b=18$ $a/b=\infty$	$a \times b$	1.12 1.15 1.19 1.29 1.40 2.01
中実半球			$\frac{\pi d^2}{4}$	0.34 1.33
円錐		$\alpha=30^\circ$ $\alpha=60^\circ$	$\frac{\pi d^2}{4}$	0.34 0.51
円板			$\frac{\pi d^2}{4}$	1.11

☆第 9 章 総合演習問題

- 層流境界層内の速度分布を $\frac{u}{U} = f(\eta) = 2\eta - \eta^2$ と仮定すると、この速度分布は、 $y = \delta$ で $u = U$ 、 $\partial u / \partial y = 0$ となり、外側の一様流に滑らかにつながる速度分布となる。このとき、つぎの関係式を導け。
 - 運動量厚さが $\theta = 2\delta/15$ となること。
 - 無次元壁面摩擦が $\tau_w / \rho U^2 = 2\nu / U\delta$ となること。

3) 以上から、境界層の厚さの変化は $\frac{d\delta}{dx} = \frac{15\nu}{U\delta}$ となること。

2. 平板層流境界層において、平板の先端 $x=0$ で境界層の厚さ $\delta=0$ として、この境界条件のもとで設問 1. における境界層厚さに関する方程式、 $d\delta/dx=15\nu/U\delta$ を解くと

$$\delta = 5.48 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \times x ; \frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.365 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}$$

となることを導きなさい。

3. 問題 2. の発展として、層流境界層の平板の幅を B 、長さを l として、摩擦抵抗 D および摩擦抗力係数 C_f がそれぞれ、

1) $D = \frac{4}{15} \frac{\rho^2 U}{2} \delta_l B ; (x=l, \delta = \delta_l)$

2) $C_f = 1.46 / \sqrt{R_{el}}$

となることを導きなさい。

4. 幅 $2m$ 、長さ $5m$ の平板が静止した水中を $10m/s$ の速度で長手方向に動くとき、平板の両面に働く摩擦抵抗を求めよ。ただし、水の動粘度 $1.01 \times 10^{-6} (m^2/s)$ とし、密度を $1000 kg/m^3$ とする。
5. 直径 $0.05mm$ の霧粒(密度 $\rho = 1000 kg/m^3$) が $20^\circ C$ の空気中を落下するときの速度(終速度)を求めよ。ただし、空気の粘度、動粘度はそれぞれ、 $\mu = 1.822 \times 10^{-5} (Pa \cdot s)$; $\nu = 1.512 \times 10^{-5} (m^2/s)$ とする。
6. 翼幅 $15m$ 、翼弦長 $2.8m$ の翼をもつ飛行機が、迎え角 1.5° 、時速 $450km$ で飛行している。このときの揚力、抗力ならびに飛行に必要な動力を求めよ。ただし、迎え角 1.5° における翼の揚力係数を 0.5 、抗力係数を 0.025 とし、胴体の影響は無視するものとする。また、空気の密度を $1.25 kg/m^3$ とする。
7. 直径 $1cm$ の球が空気中を $30m/s$ の速度で飛ぶ場合の抗力および所要動力を求めよ。ただし、空気の密度を $1.23 kg/m^3$ 、動粘度を $0.15 cm^2/s$ とする。
8. 直径 $100mm$ 、長さ $500mm$ の円柱が速度 $8m/s$ の空気中にあるとき、円柱に作用する抵抗はいくらか。ただし、空気は $10^\circ C$ で、空気の密度を $\rho = 1.247 kg/m^3$ 、動粘度を $\nu = 1.421 \times 10^{-5} m^2/s$ 、圧力は標準大気圧とする。
9. 幅 $1m$ 、長さ $0.5m$ の滑らかな平板が速度 $0.8m/s$ の水中に流れと平行に置かれている。平板の後端における境界層厚さ δ および板の両面に働く摩擦抵抗はいくらになるか。ただし、水の動粘度 $1.00 \times 10^{-6} (m^2/s)$ とし、密度を $1000 kg/m^3$ とする。